1) a) $x \neq 0$, $y \neq 0$ olduğundan $x.y \neq 0$ dır. O halde G8 den $(xy)^{-1}$ vardır ve $(xy)(xy)^{-1} = 1$ dir. $y^{-1}y = 1$, $x^{-1}x = 1$ olduğundan G5 ve G7 cisim aksiyomlarından

$$x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}(y^{-1}y)x = x^{-1}.1.x = x^{-1}.x = 1$$

olur. Buradan $(x.y).a = 1$ denkleminin çözümünün tekliğinden $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ dir.

b) $\frac{1}{x} = 0$ olamaz, çünkü $x.\frac{1}{x} = 1 \neq 0$ dır. Sadece $\frac{1}{x} < 0$ olup olmadığını araştırmalıyız. Eğer bu durum geçerli olsaydı, $0 < x$ olduğunda S4 aksiyomuna göre $1 = x.\frac{1}{x} < x.0 = 0$ olur ki bu $0 < 1$ ile çelişir.

c) $0 < x.y$ olduğundan (b) den dolayı $0 < (xy)^{-1}$ dir. S4 den dolayı $x(xy)^{-1} < y(xy)^{-1}$ ve (a) dan dolayı $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ olduğundan $y^{-1} = x(xy)^{-1} < y(xy)^{-1} = x^{-1}$ dir.

2) $M = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \dfrac{x^2-2x-3}{2x^2-15x+28} \leq 0 \right\}$ için

$$0 \geq \frac{x^2-2x-3}{2x^2-15x+28} = \frac{(x-3)(x+1)}{(2x-7)\cdot(x-4)} \Rightarrow$$

	-1		3		$7/2$		4	
$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$

$M = [-1, 3] \cup (7/2, 4)$ olup

$\inf M = \min M = -1$

$\sup M = 4$ iken $\max M$ yoktur.

3) $\tanh [\![x+1]\!] = \frac{1}{2} \Rightarrow [\![x+1]\!] = \operatorname{argtanh} \frac{1}{2}$

$$[\![x+1]\!] = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3/2}{1/2}\right) = \ln\sqrt{3} \Rightarrow$$

$Ç.K = \emptyset$

(b) $\ln\sqrt{x} - \sqrt{\ln x} = 4 \Rightarrow \frac{1}{2}\ln x - \sqrt{\ln x} = 4 \Rightarrow \ln x - 2\sqrt{\ln x} = 8 \Rightarrow$

$\ln x = t^2$ alınırsa $t^2 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow (t-4)(t+2) = 0$

$\begin{matrix} t & -4 \\ t & +2 \end{matrix}$ $\qquad t = 4 \quad t = -2.$

$t = 4$ için $\ln x = 16 \quad x = e^{16}$

$t = -2$ için $\ln x = 4 \quad x = e^4$ denklemi sağlamaz.

$Ç.K = \{e^{16}\}.$

4) $\left|\frac{n}{4n+7}-\frac{1}{4}\right| < \frac{1}{600} \Rightarrow \left|\frac{4n-4n-7}{4(4n+7)}\right| < \frac{1}{600}$

$$\Rightarrow \frac{7}{4(4n+7)} < \frac{1}{600}$$

$$\Rightarrow 4n+7 > \frac{7.600}{4} = 1050$$

$$\Rightarrow 4n > 1043$$

$$\Rightarrow n > 260,75$$

$N = 260,75$ dir. Bu sayıdan büyük ilk doğal sayı 261 dir. O halde a_{260+k}, $k=1,2,\ldots$ terimleri komşuluk içinde kalır (ki bunlar sonsuz çokluktadır). a_{260} a kadar olanlar ve a_{260} terimi komşuluk dışındadır. Yani komşuluğun dışında 260 terim vardır.

5) $a_1 = 1$ ve $a_{n+1} = \dfrac{3a_n+4}{2a_n+3}$ olsun.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq 2$ dir. Çünkü $a_{n+1} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{-1/2}{2a_n+3}$

için $a_n \leq 2$ ise $2a_n + 3 \leq 7 \Rightarrow \dfrac{-1/2}{2a_n+3} \leq \dfrac{-1}{14} \Rightarrow$

$a_{n+1} \leq \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{14} = \dfrac{20}{14} \leq 2$ dir. Ayrıca

$a_n \leq a_{n+1}$ old. da $a_{n+1} \leq a_{n+2}$ dir. Çünkü

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{3a_{n+1}+4}{2a_{n+1}+3} \cdot \frac{2a_n+3}{3a_n+4} = \frac{6a_n \cdot a_{n+1} + 9a_{n+1} + 8a_n + 12}{6a_n \cdot a_{n+1} + 9a_n + 8a_{n+1} + 12}$$

$$> \frac{6a_n \cdot a_{n+1} + 17a_{n+1} + 12}{6a_n \cdot a_{n+1} + 17a_n + 12} > 1 \text{ dir.}$$

Böylece (a_n) artan ve üstten sınırlı olup

sup değerine yakınsar. Ayrıca $a_n \to L$ ise

$a_{n+1} \to L$ olacağından $a_{n+1} = \dfrac{3a_n+4}{2a_n+3}$ ifadesinde

limite geçilirse (her iki tarafın)

$$L = \frac{3L+4}{2L+3} \Rightarrow 2L^2 + 3L = 3L + 4$$
$$\Rightarrow 2L^2 = 4 \Rightarrow L = \mp\sqrt{2}$$

olup $L = \sqrt{2}$ olmalıdır. Yani $a_n \to \sqrt{2}$ dir.

6) a) $$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin t}{\frac{\pi}{2}-t} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{\frac{\pi}{2}-t} \cdot \frac{1-\sin t}{\sin(\frac{\pi}{2}-t)}$$

$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{\frac{\pi}{2}-t} \cdot \frac{1-\sin t}{\cos t} \cdot \frac{1+\sin t}{1+\sin t}$$

$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{\frac{\pi}{2}-t} \cdot \frac{\cos^2 t}{(\cos t)(1+\sin t)}$$

$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{\frac{\pi}{2}-t} \cdot \frac{\cos t}{1+\sin t}$$

$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{\frac{\pi}{2}-t} \cdot \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sin t}$$

$$= 1 \cdot \frac{0}{2} = 0$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} \cdot \frac{x}{\tan x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{x} \cdot \frac{x}{\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot (e^x+1) \cdot \cos x$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1$$

$$= 2$$

c) $$f(x) = e + \frac{1}{2+e^{\frac{1}{x-3}}}$$

$$f(3^+) = \lim_{x\to 3^+} e + \frac{1}{2+e^{\frac{1}{x-3}}} = e + 0 = e \quad \left(\begin{array}{l} x-3 \to 0^+ \\ \frac{1}{x-3} \to +\infty \end{array} \right)$$

$$f(3^-) = \lim_{x\to 3^-} e + \frac{1}{2+e^{\frac{1}{x-3}}} = e + \frac{1}{2+0} = e + \frac{1}{2} \quad \left(\begin{array}{l} x-3 \to 0^- \\ \frac{1}{x-3} \to -\infty \\ e^{\frac{1}{x-3}} \to 0 \end{array} \right)$$

7) $\lim_{x\to a} f(x) = A$ ve $\lim_{x\to a} g(x) = B$ ve $A<B$

olsun. O zaman $\forall \varepsilon>0$ için

$0<|x-a|<\delta_1$ old. da $|f(x)-A|<\varepsilon$ o.ş. $\exists \delta_1>0$

ve

$0<|x-a|<\delta_2$ old. da $|g(x)-B|<\varepsilon$ o.ş. $\exists \delta_2>0$

vardır. $A<B$ old. dan $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$ alınırsa

$\delta = \min\{\delta_1', \delta_2'\}$ alındığında $0<|x-a|<\delta$

için $|f(x)-A| < \frac{B-A}{2}$ ve $|g(x)-B| < \frac{B-A}{2}$

dir. Yani $0<|x-a|<\delta$ old. da

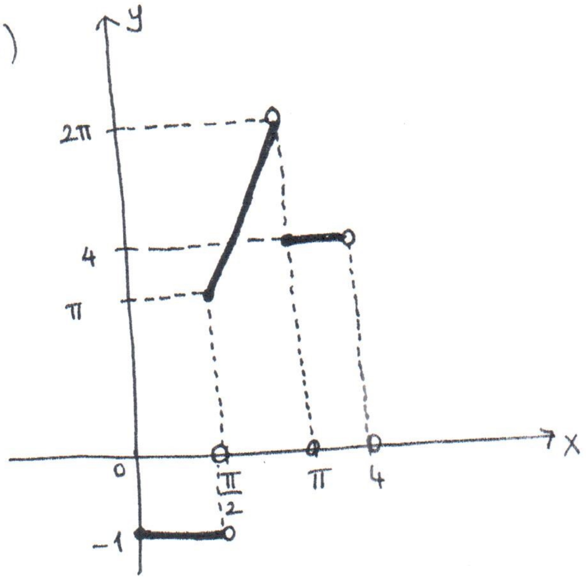
$$\frac{3A-B}{2} < f(x) < \frac{A+B}{2} < g(x) < \frac{3B-A}{2} \Rightarrow$$

$f(x) < g(x)$ bulunur.

8) $f(x) = \begin{cases} sgn\left(x-\frac{\pi}{2}\right) & , 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ |2x-\pi| + \pi & , \frac{\pi}{2} \le x < \pi \\ [|x+1|] & , \pi \le x < 4 \end{cases}$

$= \begin{cases} -1 & , 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 2x & , \frac{\pi}{2} \le x < \pi \\ 4 & , \pi \le x < 4 \end{cases}$

a)



b) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \pi$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = -1$

$\pi \neq -1$ olduğundan $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$ yoktur.

$\lim_{x \to \pi^+} f(x) = 4$

$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = 2\pi$

$4 \neq 2\pi$ olduğundan $\lim_{x \to \pi} f(x)$ yoktur.

c) $x = \frac{\pi}{2}$ ve $x = \pi$ noktalarında limit var olmadığından f fonksiyonu bu noktalarda sürekli değildir. $x = \frac{\pi}{2}$ ve $x = \pi$ sıçramalı süreksizlik noktasıdır.